Dvp : Une classe de séries lacunaires sans dérivées

Ref : Analyse pr l'agreg Quéf-Zuily p 111 ; fin chap sur séries de Fourier, lexique lacunaire

⓪ Def $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite ~~lac~~ :

- séparée si $\mu_n = \text{dist}(\lambda_n, \Lambda \setminus \{\lambda_n\}) > 0, \forall n \geq 1$
- lacunaire si elle est séparée et $\mu_n \longrightarrow +\infty$

Expl : • Avec $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une numérotation des rationnels, $\mu(r_n) = 0, \forall n$.

- $(\lambda_n)_{n \geq 0} = (n)_{n \geq 0}$ est séparée non lacunaire ; $\mu_n = \lambda_n - \lambda_{n-1} \sim \alpha n^{\alpha - 1}$
- $(\lambda_n)_{n \geq 0} = (n^\alpha)_{n \geq 0}$ est lacunaire pour $\alpha > 1$

Thm : Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite lacunaire de réels. $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ une suite absolument convergente.

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n e^{i\lambda_n t} \end{array}$$

Alors f est normalement convergente donc continue. De plus si f est dérivable en au moins un point alors $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{\mu_n}\right)$

En particulier si $|\varepsilon_n| \geq \frac{\delta}{\mu_n}$ avec $\delta > 0$ alors f n'est dérivable en aucun point (car $\varepsilon_n \mu_n \not\to 0$ et donc $\varepsilon_n \neq o(\frac{1}{\mu_n})$).

Application. La série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{in^3 t}$ est continue et dérivable nulle part car pour $\lambda_n = n^3$ on a $\mu_n = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1 \geq n^2, \forall n \geq 1$.

Preuve du théorème

① Lemme (admis) : Il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{S}$ de la classe de Schwartz de transformée de Fourier $\hat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-itx} dt$ telle que $\hat{\varphi}(0) = 1$ et $\hat{\varphi}(x) = 0$ si $|x| \geq 1$.

② Lemme : Soit $\varphi_n(t) = \mu_n \varphi(\mu_n t)$

Alors (1) $\varepsilon_n = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda_n t} \varphi_n(t) dt$

(2) $|\varepsilon_n| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(\frac{t}{\mu_n})| \, |\varphi(t)| dt$

↳ (1) : $k \neq n \Rightarrow \left|\frac{\lambda_n - \lambda_k}{\mu_n}\right| \geq 1 \Rightarrow \hat{\varphi}\left(\frac{\lambda_n - \lambda_k}{\mu_n}\right) = 0$

(NB : $\widehat{\varphi_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t) e^{-itx} dt = \int_{\mathbb{R}} \mu_n \varphi(\mu_n t) e^{-itx} dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) e^{-iu\frac{x}{\mu_n}} du = \hat{\varphi}\left(\frac{x}{\mu_n}\right)$

Fubini-Tonneli : $\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k e^{i(\lambda_k-\lambda_m)t} \varphi_m(t)| dt = \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi_m|\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\varepsilon_k|\right) < +\infty$

Fubini-Lebesgue :
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda_m t} \varphi_m(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k e^{i(\lambda_k-\lambda_m)t} \varphi_m(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\lambda_m-\lambda_k)t} \varphi_m(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k \widehat{\varphi_m}(\lambda_m-\lambda_k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k \widehat{\varphi}\left(\frac{\lambda_m-\lambda_k}{\mu_m}\right) \\ &= \varepsilon_m \widehat{\varphi}(0) \\ &= \varepsilon_m\end{aligned}$$

(2) s'obtient par inégalité triangulaire et changement de variables. □

③ Supposons d'abord f dérivable en 0 avec $f(0)=f'(0)=0$

(3.1) $\exists C>0 ; \forall t\in\mathbb{R}, |f(t)| \leqslant C|t|$

↳ • Taylor Young : $f(t) = \underset{t\to 0}{o}(t) \Rightarrow \exists \delta>0 ; \forall |t|<\delta, |f(t)| \leqslant |t|$

• $|t| \geqslant \delta \Rightarrow |f(t)| \leqslant \sum |\varepsilon_m| \leqslant \left(\sum |\varepsilon_m|\right) \times \frac{|t|}{\delta} = C_0 |t|$

• $C = \max(C_0, 1)$ convient

(3.2) Par (2) : $|\mu_m \varepsilon_m| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \mu_m \left|f\left(\frac{t}{\mu_m}\right)\right| |\varphi(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} g_m(t) dt$

On a $\lim \int_{\mathbb{R}} g_m(t) dt = 0$ par le théorème de convergence dominée

↳ • domination : $\left|\mu_m f\left(\frac{t}{\mu_m}\right) \varphi(t)\right| \leqslant C|t\varphi(t)| \in L^1(\mathbb{R})$ car $\varphi\in S$.

• convergence : $\mu_m f\left(\frac{t}{\mu_m}\right) = t \dfrac{f\left(\frac{t}{\mu_m}\right)-f(0)}{\frac{t}{\mu_m}-0} \xrightarrow[m\to+\infty]{(3.1)} t f'(0) = 0$ d'où $g_m(t) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0, \forall t$

Ainsi $|\mu_m \varepsilon_m| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ et donc $\varepsilon_m = o\left(\frac{1}{\mu_m}\right)$

④ Supposons f dérivable en $t_0\in\mathbb{R}$ quelconque

Soit $g(t) = f(t+t_0) - a e^{i\lambda_1 t} - b e^{i\lambda_2 t} = \sum_{m=1}^{+\infty} \varepsilon'_m e^{i\lambda_m t}$ avec $\varepsilon'_m = \varepsilon_m e^{i\lambda_m t_0}$ si $m\geqslant 3$ (et $\varepsilon'_m = \varepsilon_m e^{i\lambda_m t_0} - (a\delta_1(m) + b\delta_2(m))$).

On a alors $g(0) = 0 = g'(0) \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b = f(t_0) \\ \lambda_1 a + \lambda_2 b = \frac{f'(t_0)}{i} \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_0) \\ \frac{f'(t_0)}{i} \end{pmatrix}$$

Comme $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \neq 0$ ce système a une solution et donc en se ramenant au cas ③ avec les bons a et b on a $|\mu_m \varepsilon'_m| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

Or $|\varepsilon'_m| = |\varepsilon_m|, \forall m\geqslant 3$

D'où $|\mu_m \varepsilon_m| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$